Teoría de Modelos - Práctica 1

Ejercicios

Ejercicio 1 (Marker [1], 1.4.5)**.** Mostrar que las siguientes clases son elementales. En cada caso, elegir primero un lenguaje apropiado.

1. Órdenes parciales.
2. Retículos.
3. Álgebras de Boole.
4. Dominios íntegros.
5. Árboles.

Ejercicio 2 (Marker [1], 1.3.3)**.** Sea $\mathcal{L}_r$ el lenguaje de los anillos ordenados y $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ el cuerpo ordenado de los números reales. Supongamos que $X \subset \mathbb{R}^n$ es A-definible. Entonces la clausura topológica de X también es A-definible.

Ejercicio 3. Si $A \equiv B$ y A es finito, entonces $A \simeq B$.

Ejercicio 4. Si una teoría tiene modelos arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo infinito.

Ejercicio 5. Sean A, B, C estructuras tales que $A \prec C$, $B \prec C$ y tales que el dominio de A está contenido en el dominio de B. Entonces $A \prec B$.

Ejercicio 6. Los órdenes $\omega + 1$ y $\omega + \omega^*$ no son isomorfos.

Ejercicio 7 (Doets [2])**.** Para cada par A, B de estructuras elegidas entre las siguientes, decidir si: $A \subset B$, $A \simeq B$, A es elementalmente embebible en B.
$(\mathbb{N}, <), (\mathbb{N}, >), (\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Z}, >), (\mathbb{N}^+, <), (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, <), (\mathbb{Q}, <), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, <), (\mathbb{Q}^+, <), (\mathbb{R}, <),$
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, <), (\mathbb{R}^+, <), (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, <)$.
¿Qué ocurre con los pares $(A, 1,), (B, 1)$, donde se agrega a cada estr. una constante para el 1?

Ejercicio 8. Si una clase de modelos y su complemento son elementales, entonces son definibles.

Ejercicio 9. La clase de modelos con universo finito no es elemental.

Ejercicio 10. Si existen embeddings de A en B y de B en A, ¿tiene que ser $A \equiv B$?

Problemas

Problema 11. Si existen embeddings elementales de A en B y de B en A, ¿tiene que ser $A \simeq B$?

Problema 12. Sea $A = (\langle a, b \rangle, \circ)$ el conjunto de las palabras formadas con las letras a, b, junto con la concatenacion de palabras. Probar que *x tiene longitud par* es expresable.

Problema 13. Probar que la relación ternaria $z = x^y$ es expresable en $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$.

Referencias

[1] D. Marker, *Model theory: an introduction*, Springer, 2002.

[2] K. Doets, *Basic Model Theory*, CSLI, 1996.