Teoría de Modelos - Práctica 2

Ejercicios

Ejercicio 1. Clausura Transitiva. Considerar la signatura $\sigma =< R >$ compuesta por un único símbolo de predicado binario. Demostrar, usando compacidad, que no existe una fórmula $\varphi_R(x, y)$ en el lenguaje de primer orden sobre σ tal que, para toda interpretación $\mathcal{I}$, φ_R exprese la clausura transitiva de la relación binaria $R^{\mathcal{I}}$.

Ejercicio 2. Conexión. Sea σ la signatura compuesta por un único símbolo de predicado binario R, y sea ψ_G la fórmula que que define la clase de grafos no orientados.

Demostrar que no existe una sentencia κ tal que la clase de modelos de $\psi_G \wedge \kappa$ sea la clase de grafos no orientados *conexos* (un grafo es conexo si entre cualquier par de nodos hay un camino de longitud finita). En otras palabras, demostrar que la clase de grafos conexos no es definible en la lógica de primer orden.

Ejercicio 3. Dado un conjunto de fórmulas de primer orden Σ, demostrar que si existe un conjunto finito de fórmulas Γ tal que $\mathbf{Con}(\Gamma) = \mathbf{Con}(\Sigma)$, entonces existe un conjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \models \Sigma$.

Ejercicio 4. Naturales con cero y sucesor. Vamos a llamar $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0; suc \rangle$ al modelo usual de los números naturales con cero y sucesor. Considerar una signatura de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de constante 0 y un símbolo unario de función *suc*. Sea la siguiente axiomatización SQ_N, que extiende a los axiomas usuales del cálculo de predicado con infinitos axiomas:

S1	$(\forall x) suc(x) \neq 0$
S2	$(\forall x)(\forall y)(suc(x) = suc(y) \to x = y)$
S3	$(\forall y)\big(y \neq 0 \to (\exists x)(y = suc(x))\big)$
S4$_n$	$(\forall x)(suc^{(n)}(x) \neq x)$, para cada $n > 1$

1. Convencerse de que $S1, S2, S3$ y toda instancia de $S4_n$ es verdadera en $\mathcal{N}$.
2. Demostrar que para cualquier subconjunto finito Γ de axiomas de SQ_N existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ pero $\mathcal{M} \not\models SQ_N$.
3. Sabiendo que SQ_N es correcta y completa con respecto a $\mathcal{N}$, demostrar que ninguna axiomatización correcta y finita de primer orden es completa con respecto a $\mathcal{N}$. Sugerencia, usar el ejercicio 3.
4. Hallar un modelo $\mathcal{M} = \langle \mathbb{M}; 0'; suc' \rangle$ de SQ_N que no sea isomorfo a $\mathcal{N}$.

Ejercicio 5. Principio de Robinson: Si un enunciado de primer orden vale en todo cuerpo de característica cero entonces existe una constante p tal que el enunciado vale en todo cuerpo de característica mayor que p.

Ejercicio 6. Sea $T_0 \subset T_1 \subset T2 \subset ...$ una sucesión de σ-teorías tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un modelo de T_n que no es modelo de T_{n+1}. Entonces $T = \bigcup_n T_n$ no es finitamente axiomatizable. Si la signatura σ es finita, probar que T tiene un modelo infinito.