Teoría de Modelos - Práctica 3

Ejercicios

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E es un símbolo de relación. Consideremos la $\mathcal{L}$-teoría T de las relaciones de equivalencia que poseen infinitas clases.

1. Escribir los axiomas de T.
2. ¿Cuántos modelos numerables no isomorfos posee T?
3. Decidir si T es completa.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L} = \{s\}$, donde s es un símbolo de función unario. Consideremos la $\mathcal{L}$-teoría T que afirma que s es una biyección que no contiene ciclos (es decir, tal que $s^{(n)}(x) \neq x$ para todo x). Determinar para qué cardinales κ la teoría T resulta κ-categórica.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}_3 = \{\leq, c_0, c_1, ...\}$, donde los c_i son constantes, y consideremos la teoría T_3 de los órdenes densos lineales a la que se agregan axiomas que afirmen que $c_0 < c_1 < ...$, es decir, que la sucesión $(c_i)_{i \in \mathbf{N}}$ es estrictamente creciente. Probar que T_3 tiene exactamente 3 modelos numerables no isomorfos (Sug.: considerar los casos en que $(c_i)_{i \in \mathbf{N}}$ tenga cota superior y cota superior mínima).

Ejercicio 4. Sea ϕ una sentencia en el lenguaje de los anillos. Probar que son equivalentes:

1. ϕ es verdadera en $\mathbf{C}$.
2. ϕ es verdadera en todo cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.
3. ϕ es verdadera en algún cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.
4. Existen números primos p arbitrariamente grandes tales que ϕ es verdadera en algún cuerpo algebraicamente cerrado de característica p.
5. Existe $n \in \mathbf{N}$ tal que, para todo primo $p > n$, ϕ es verdadera en cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica p.

Ejercicio 5. Probar que el enunciado del teorema de Ax resulta falso si se intercambian las palabras *inyectivo* y *suryectivo*. ¿En qué punto falla la demostración con teoría de modelos?

Ejercicio 6. Probar que la teoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo infinito fijo F es completa (Sug.: si $|F| = \kappa$, probar que tal teoría es κ'-categórica para todo $\kappa' > \kappa$.)

Ejercicio 7. Sea T la teoría de grupos abelianos divisibles sin torsión, es decir, T contiene los axiomas de grupo abeliano junto con los axiomas:

$$\mathbf{S1}_n : \forall x (x \neq 0 \implies x + ... + x \neq 0)$$

$$\mathbf{S2}_n : \forall x \exists y (y + ... + y = x)$$

con n-sumandos cada uno, para cada $n \in \mathbf{N}$.

1. Probar que T es completa mostrando que T es κ-categórica para todo κ no numerable (Sug.: usar el ejercicio anterior).
2. ¿Es T $\aleph_0$-categórica?

Ejercicio 8. Sea T la teoría de los grupos abelianos en los que cada elemento tiene orden 2.

1. Probar que T es κ-categórica para todo cardinal infinito κ, pero que, sin embargo, T no es completa.
2. Encontrar una teoría completa T' que incluya a T y que posea los mismos modelos infinitos que T.

Ejercicio 9. Dados conjuntos totalmente ordenados $(I, \leq)$ y $(A_i, \leq)$ para cada $i \in I$, se define el conjunto ordenado $\sum_{i \in I} A_i$ como el conjunto $\cup_{i \in I} A_i$ con el orden dado por $(i, x) \leq (j, y)$ si y sólo si $i < j$ o bien $i = j, x \leq y$. Definamos los conjuntos totalmente ordenados $A = \mathbf{Q} + 2 + \mathbf{Q}$ y $B = \mathbf{Q} + 3 + \mathbf{Q}$, donde 2 y 3 son conjuntos discretos. Sea finalmente κ un cardinal infinito.

1. Si para cada $X \subseteq \kappa$ y $\alpha < \kappa$ definimos $C_\alpha = \begin{cases} A & \text{si } \alpha \in X \\ B & \text{si } \alpha \notin X \end{cases}$ y llamamos L_X al conjunto totalmente ordenado $\sum_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, demostrar que L_X y L_Y no son isomorfos cuando $X \neq Y$.
2. Probar que hay exactamente 2^κ órdenes lineales no isomorfos de cardinal κ.
3. * Si κ es no numerable, probar que hay exactamente 2^κ órdenes lineales *densos* no isomorfos de cardinal κ.